



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Elastisk energi, dissipation og konstitutive ligninger

Rathkjen, Arne

Publication date:
2003

Document Version
Tidlig version også kaldet pre-print

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Rathkjen, A. (2003). *Elastisk energi, dissipation og konstitutive ligninger*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. R / Institut for Bygningsteknik Bind R0304

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITET • AUC • AALBORG • DANMARK

TEAM 2003.1

A. RATHKJEN
ELASTISK ENERGI, DISSIPATION OG
KONSTITUTIVE LIGNINGER
SEPTEMBER 2003

ISSN 1395-7953 R0304

TEAM

A. RATHKJEN

2003.1

ELASTISK ENERGI, DISSIPATION OG
KONSTITUTIVE LIGNINGER

SEPTEMBER 2003

ISSN 1395-7953 R0304

Elastisk energi, dissipation og konstitutive ligninger

Når et legeme tilføres energi alene i form af mekanisk og termisk energi, har man *effekt-ligningen*

$$\dot{W}_y = \dot{K} + \dot{W}_i \quad (1)$$

hvor

$$\dot{W}_y = \int_a \bar{\sigma} \cdot \bar{v} da + \int_v \rho \bar{b} \cdot \bar{v} dv \quad \text{er de ydre kræfters effekt}$$

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \int_v \rho \bar{a} \cdot \bar{v} dv && \text{er den materielle tidsafledede af den kinetiske energi} \\ K &= \frac{1}{2} \int_v v \rho \bar{v} \cdot \bar{v} dv \end{aligned}$$

$$\dot{W}_i = \int_v \underline{\sigma} : \underline{d} dv \quad \text{er de indre kræfters effekt}$$

se afsnit 16.1 i [1].

Med betegnelserne A for den oplagrede *elastiske energi* og D for *dissipationen* har man den konstitutive ligning

$$\underline{\sigma} : \underline{d} = \dot{A} + \dot{D} \quad (2)$$

hvor $\underline{\sigma}$ er Canchys spændingstensor, og $\underline{d} = \dot{\underline{\varepsilon}}$ er tøjningshastighedstensoren. Den elastiske energi A er en non-negativ størrelse, og den afledede \dot{A} er positiv, når der udføres arbejde på legemet, mens \dot{A} er negativ, når legemet udfører arbejde på omgivelserne. Dissipationen D er ligeledes en non-negativ størrelse, men her gælder, at den afledede, dissipationshastigheden \dot{D} , er non-negativ, hvad enten der udføres arbejde på eller af legemet.

For et legeme, som består af et dissipativt materiale, gælder, at kun en del af det på legemet udførte arbejde \dot{W}_y oplagres som mekanisk energi (\dot{A} og \dot{K}), mens resten bliver til termisk energi (\dot{D}). Der forekommer en varmeproduktion, og man har

$$\dot{D} = \rho r \quad (3)$$

hvor r er den *specifikke varmeproduktion*.

Den totale energi i legemet bestemmes ved

$$\dot{E}_{total} = \dot{K} + \dot{A} + (\dot{D} = \rho r) - \text{div} \bar{q}$$

når den eneste varmeproduktion hidrører fra dissipation. Her er \bar{q} varmestrømvektoren, positiv bort fra legemet.

Som eksempler på udtryk for den elastiske energi A og dissipationshastigheden \dot{D} kan anføres:

$$A = \sigma^2/2E \quad , \quad \dot{D} = \sigma^2/\eta \quad (4)$$

for et Maxwell materiale,

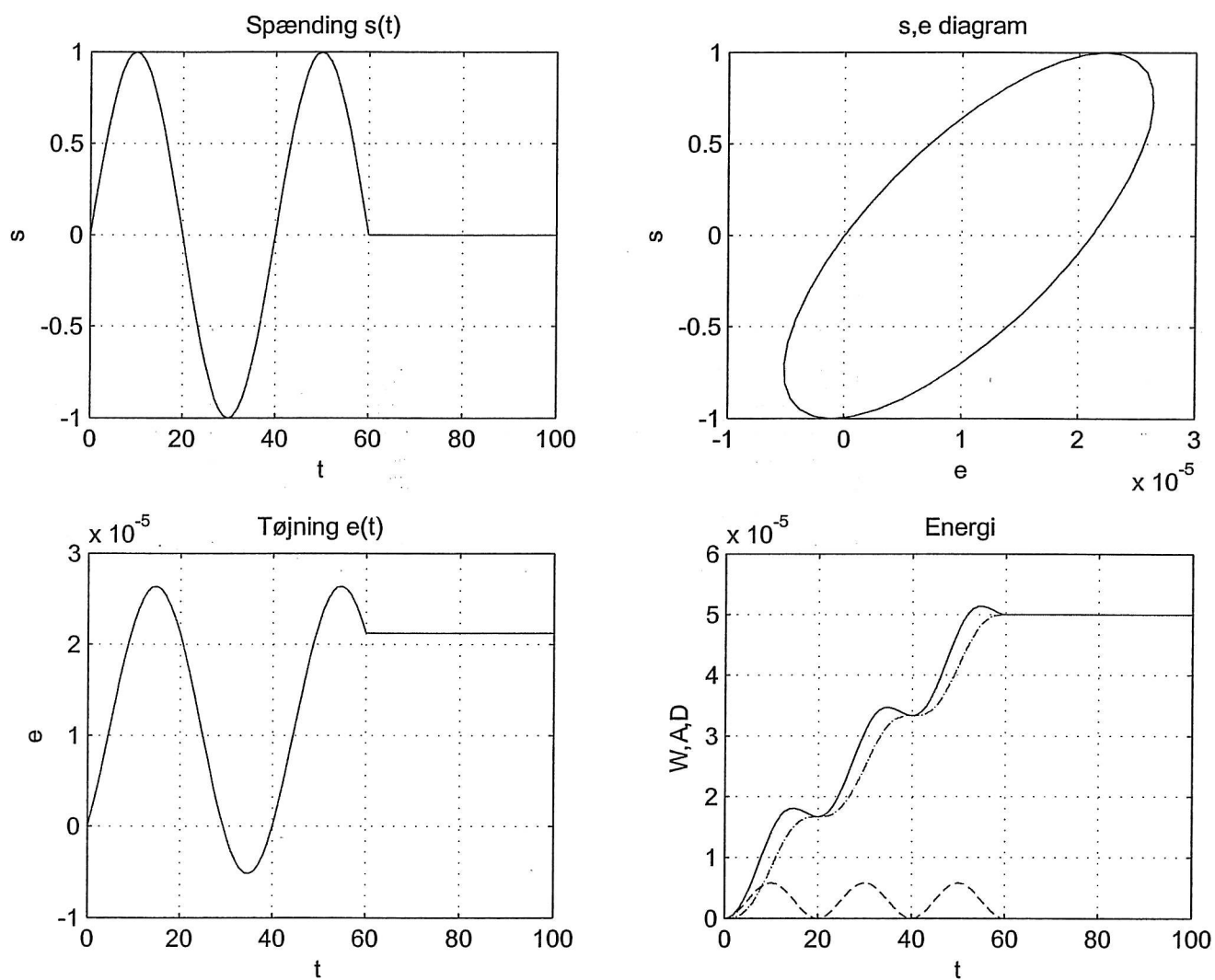
$$A = E\epsilon^2/2 \quad , \quad \dot{D} = \eta\dot{\epsilon}^2 \quad (5)$$

for et Kelvin-Voigt materiale og

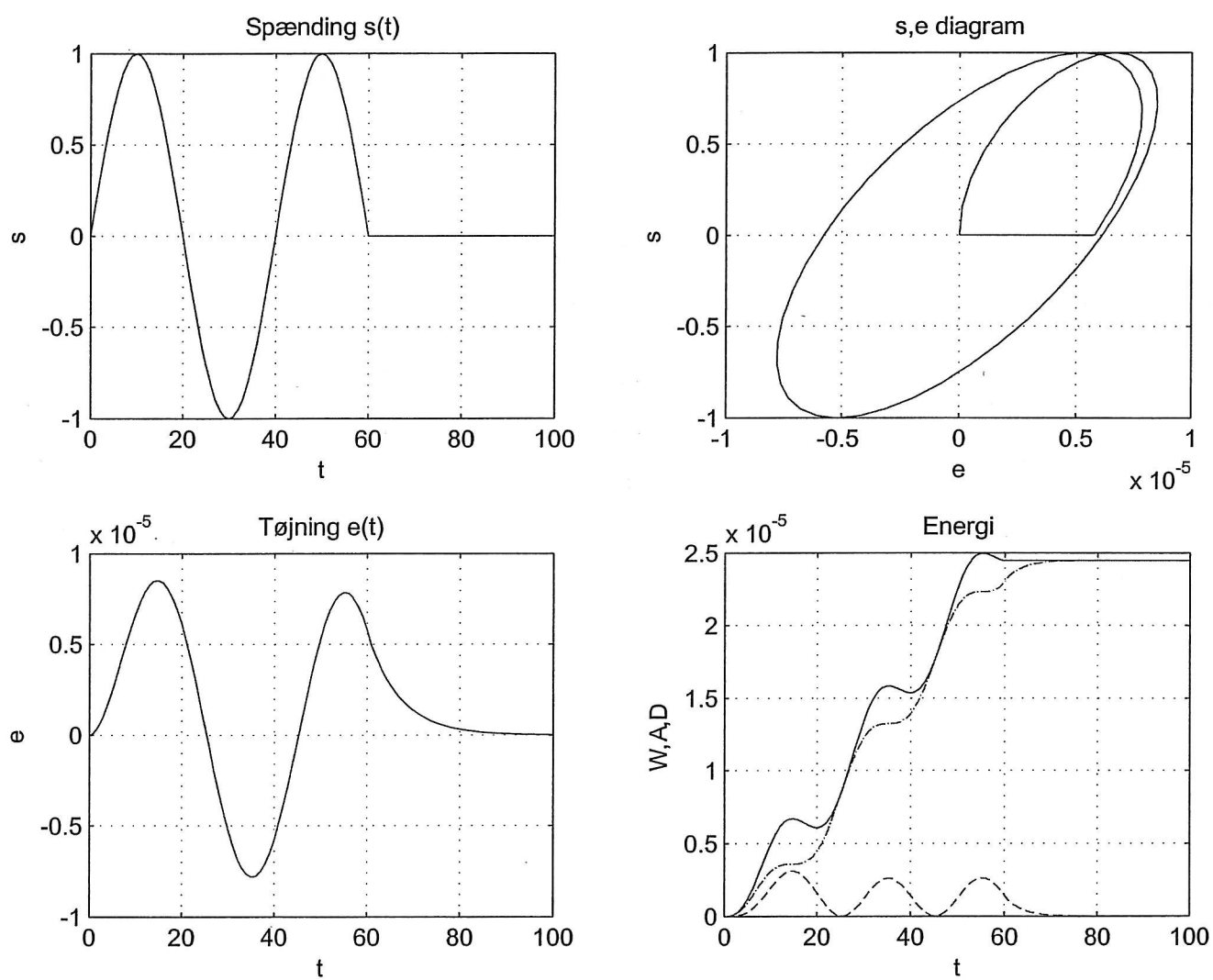
$$\begin{aligned} A &= \sigma^2/2E_1 + (\sigma - \eta_2(\dot{\epsilon} - \dot{\sigma}/E_1 - \sigma/\eta_1))^2/2E_2 \\ \dot{D} &= \sigma^2/\eta_1 + \eta_2(\dot{\epsilon} - \dot{\sigma}/E_1 - \sigma/\eta_1)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

for et Burgers materiale, se afsnit 25.3.1 i [1].

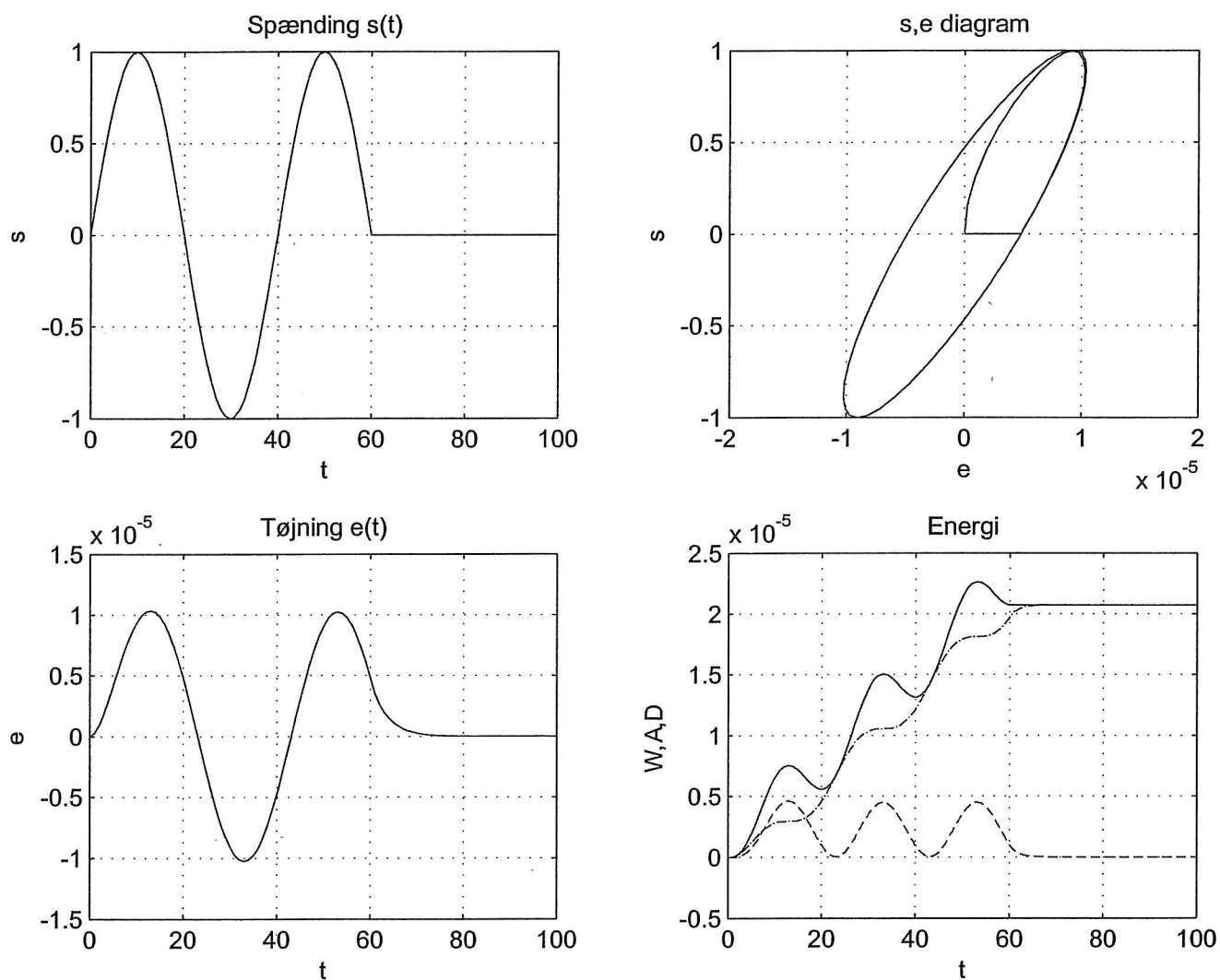
I figurerne 1-3 er vist spændingens variation med tiden, tøjningens variation med tiden, spændingens variation med tøjningen samt den totale energis, den elastiske energis og dissipationens variation med tiden for tre viskoelastiske modeller: Et Maxwell materiale, et Kelvin-Voigt materiale og en model, hvor to Kelvin-Voigt elementer er anbragt i serie. I figurerne er signaturen for W —, for A — — og for D — .



Figur 1.



Figur 2.



Figur 3.

Ovennævnte materialemodeller er viskoelastiske, men også for elastoplastiske modeller fører udtrykket $\underline{\sigma} : \underline{\dot{d}} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}} = \dot{A} + \dot{D}$ til en konstitutiv ligning. Betragtes således et lineærelastisk element i serie med et hærtnende plastisk element har man

$$\begin{aligned} A &= \underline{\sigma} : \underline{\dot{S}} : \underline{\sigma} / 2 \\ \dot{D} &= \underline{\sigma} : \partial f / \partial \underline{\sigma} : \partial f / \partial \underline{\sigma} : \dot{\sigma} / m \end{aligned} \quad (7)$$

hvor $m = -\partial f / \partial \underline{\sigma} : d\underline{\kappa} / d\underline{\varepsilon} \partial f / \partial \underline{\kappa}$

se afsnit 33 i [1].

Forholdene bliver noget anderledes, hvis man anbringer de to elementer, det elastiske element og det plastiske element, parallelt. Udtrykket (2) fører ikke umiddelbart til en konstitutiv ligning i dette tilfælde. I stedet for en flydebetingelse udtrykt ved spændinger må man benytte en flydebetingelse udtrykt ved tøjninger, og i stedet for de virkelige (fysiske) energier og dissipation må man benytte de tilsvarende komplementære størrelser.

Vi har

flydebetingelsen $F(\underline{\varepsilon}^D, \underline{K}) = 0$ i stedet for $f(\underline{\sigma}^D, \underline{\kappa}) = 0$

hærtningsparametern $\underline{K}(\underline{\sigma}^D)$ i stedet for $\underline{\kappa}(\underline{\varepsilon}^D)$

Tilbage er blot spørgsmålet om, hvad man skal sætte i stedet for flydeloven, som giver en relation mellem dissipative tøjninger $\underline{\varepsilon}^D$ og spændinger $\underline{\sigma}^D$ i det plastiske element.

Som anført i [2] fører en antagelse om stationær effekt $\delta \dot{W} = \delta \sigma^D : \dot{\varepsilon}^D = 0$ ved en variation af spændinger på flydeflader $f(\underline{\sigma}) = 0$ til den associerede flydelov eller normalitetsbetingelsen. Man kan derfor antage, at den komplementære effekt $\dot{C} = \underline{\varepsilon}^D : \dot{\underline{\sigma}}^D$ er stationær, dvs. $\delta \dot{C} = \delta \underline{\varepsilon}^D : \dot{\underline{\sigma}}^D = 0$, ved en variation af tøjningerne på flydeflader $F(\underline{\varepsilon}) = 0$. Denne antagelse fører til en normalitetsbetingelse

$$\dot{\sigma}^D = \Lambda \partial F / \partial \underline{\varepsilon}^D \quad (8)$$

som benyttes sammen med

konsistensbetingelsen $dF/d\alpha = \dot{F} = \underline{\dot{\varepsilon}}^D : \partial F / \partial \underline{\varepsilon}^D - \Lambda M = 0$ hvor

$$M = -\partial F / \partial \underline{\sigma}^D : d\underline{K} / d\underline{\sigma}^D \partial F / \partial \underline{K}$$

den komplementære elastiske energi α i stedet for A , ($\dot{\alpha} = \dot{\underline{\sigma}}^E : \underline{\varepsilon}^E$)

den komplementære dissipation δ i stedet for D , ($\dot{\delta} = \dot{\underline{\sigma}}^D : \underline{\varepsilon}^D$)

For den elastoplastiske model med et lineærelastisk element anbragt parallelt med et plastisk element finder man

$$\begin{aligned}\alpha &= \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}/2 \\ \dot{\delta} &= \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} : \partial F / \partial \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \partial F / \partial \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}/M\end{aligned}\tag{9}$$

Af udtrykket for den komplementære energi

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \dot{\alpha} + \dot{\delta}\tag{10}$$

fås den konstitutive ligning

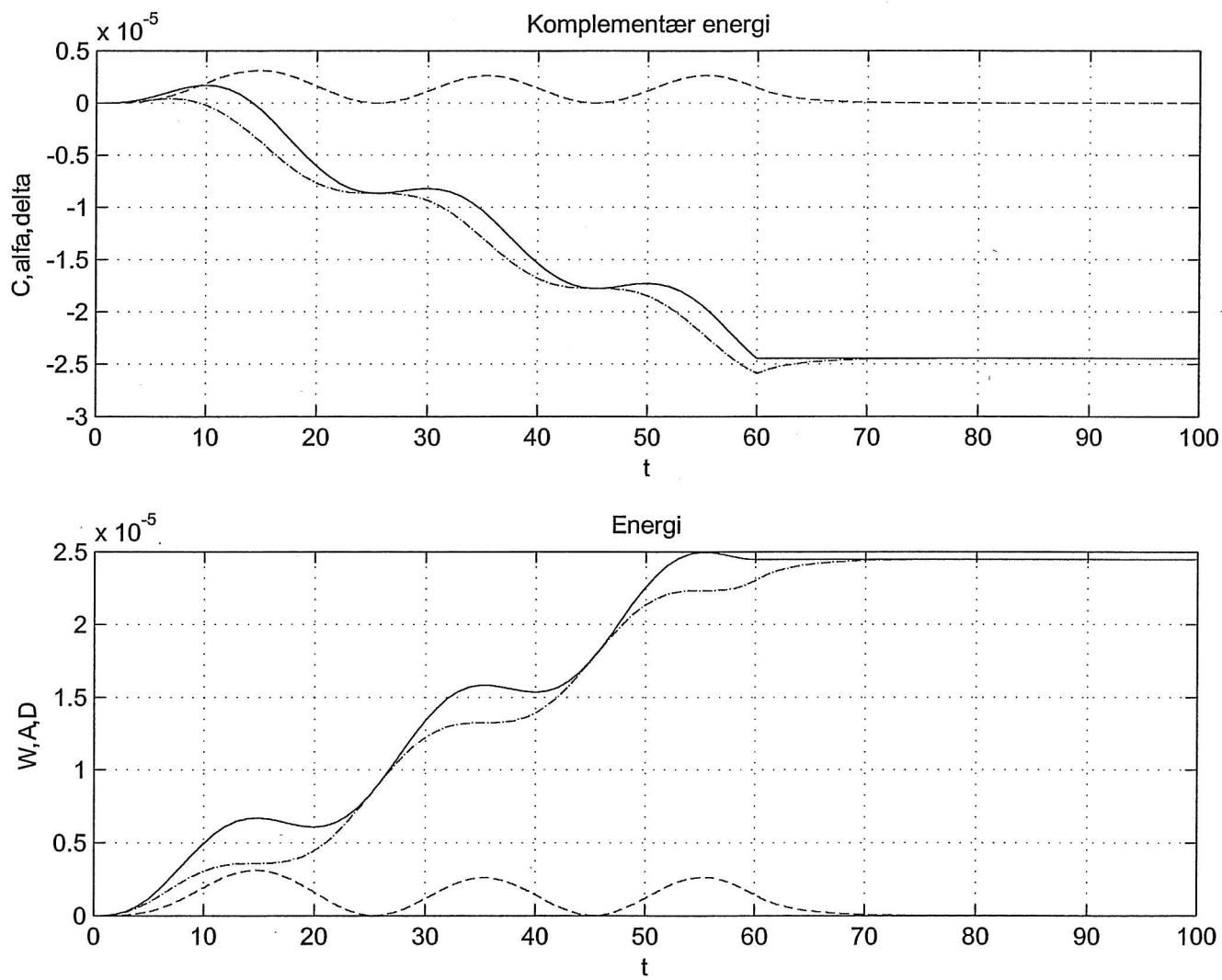
$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} : (\underline{\underline{C}} + \partial F / \partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial F / \partial \underline{\underline{\varepsilon}} / M)\tag{11}$$

- [1] A. Rathkjen: Kontinuummekanik, 1999/2001
- [2] R.v. Mises: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, ZAMM, Bd. 8, 1928, 161-185

Noter

- 1) Såvel materialeparametre som tøjninger og spændinger ændres ved temperaturændringer, hvilket kan have stor betydning for især dissipative materialer.
- 2) Selv om den komplementære energi har samme dimension som energi, er der ikke tale om nogen fysisk størrelse (se også Oravas & McLean: Historical Development of Energetical Principles in Elastomechanics in Applied Mechanics Reviews, vol 19, no 11, p 921, 1966).

Variationen med tiden af de komplementære størrelser C , α og δ er vist i figur 4 for et Kelvin-Voigt materiale sammen med variationen af de fysiske størrelser W , A og D .



Figur 4.